

# Taux d'actualisation public et prime de risque, une exploration quantitative\*

Christophe Hurlin et Franck Portier<sup>†</sup>

Juin 1998

## Résumé

Nous proposons dans cette étude une exploration quantitative du lien taux d'actualisation public - risque dans un modèle dynamique simple d'équilibre général stochastique. Les propriétés stochastiques des rendements du capital public et du capital privé sont dérivées de manière endogène du modèle, et dépendent en particulier de la substitution entre les deux types de capital et de l'aversion au risque des ménages. Nous montrons comment il peut être optimal d'exiger du capital public un rendement social en moyenne inférieur à celui du capital privé, s'il possède une valeur d'assurance dans un univers risqué.

We propose in this paper a quantitative exploration of the links between the social discount rate and the level of risk in a simple dynamic and stochastic general equilibrium model. The stochastic processes of private and public capital returns are derived endogenously from the model, and depend on the substitutability between the two factors and on the household's level of risk aversion. We show that it might be optimal to set the level of public capital such that its average return is lower than the private capital one, if the former can insure risk averse households in a risky world.

**Code JEL:** H43 – E62 – D81

**Mots-Clés:** Taux d'actualisation public – risque – équilibre général

**Keywords:** Social Discount Rate – Risk – General Equilibrium

---

<sup>†</sup>Respectivement CEPREMAP – MAD Paris I et CREST – CEPREMAP. Rapport finalisé 1997 pour le Commissariat Général du Plan. Nous remercions P.Y. Hénin pour avoir initié ce projet.



# 1 Introduction

L'examen de la contribution du capital public au fonctionnement de l'économie apparaît comme une question à nouveau théoriquement pertinente depuis quelques années, après avoir quasiment disparu dans les années quatre-vingt. Il est idéniable que ce regain d'intérêt trouve en partie sa source dans le renouveau des théories de la croissance (depuis [Romer-86]). Dans un modèle de croissance endogène, le capital public peut des moteurs de la croissance, s'il appartient au cœur de l'économie, pour reprendre la définition de [Glachant-96]. L'idée que le capital public à un rôle d'externalité dans la production marchande n'est pas nouvelle, mais son intérêt se trouve renouvelé par ses modèles de croissance endogène. En outre, les travaux de [Aschauer-89] ont montré empiriquement l'importance du capital public dans la production de valeur ajoutée au niveau agrégé. Dans un travail récent ([Hurlin-Portier-97]), nous avons étudié les liens entre taux d'actualisation public, distorsions fiscales et croissance, dans un modèle déterministe de croissance endogène, et montré l'importance des distorsions fiscales dans la détermination du couple taux d'actualisation public – croissance.

La dimension stochastique avait été absente de nos travaux pour réduire la dimensionalité du problème, et nous nous proposons ici de la rétablir dans un modèle dynamique d'équilibre général à anticipations rationnelles. Comme le souligne [Hénin-97], l'alignement du taux d'actualisation sur le taux d'intérêt du marché, outre les questions liées aux distorsions fiscales et aux externalités, que nous avons déjà étudiées dans le travail précités, revient à exclure l'exigence de toute prime de risque sur les investissements considérés, et ce dans la lignée des arguments de [Samuelson-64] et [Arrow-Lind-70].

[Grinols-85] a montré cependant que dans un modèle de portefeuille, l'investissement public peut comporter une valeur d'assurance pour les investisseurs. Cette valeur d'assurance sera positive ou négative selon la covariance des différents rendements, et justifiera une prime positive ou négative sur le taux d'actualisation public.

Nous nous proposons dans cette étude d'explorer quantitativement cet argument dans un modèle d'équilibre général stochastique et dynamique, afin d'endogénéiser les processus des rendements du capital public et du capital privé. Nous serons alors à même de comprendre quels paramètres structurels (l'aversion au risque, la substitutabilité des deux types de capital dans la production, la taille relative des chocs communs ou spécifiques....) conditionnent la variabilité et la covariance des rendements, et dès lors la prime (positive ou négative) appliquée aux investissements publics.

Dans le modèle que nous étudions, deux chocs sont présents. Le premier est un choc commun sur la productivité totale des facteurs, et affectera symétriquement les deux rendements. Le second est supposé frappé uniquement le capital privé, et plus précisément sa dépréciation. Nous interprétons ce choc comme une forme réduite de tous les mécanismes de marché qui, en propageant les chocs, modifient la valeur relative du stock de capital privé par rapport au stock de capital public. Dans un modèle multi-sectoriel, un tel effet transite par le prix relatif du capital privé. Dans notre modèle mono-sectoriel simple, il est formalisé comme une variation de la perte en capital entre deux périodes. Une telle formalisation donne *a priori* un avantage comparatif au capital public dans la mesure où celui-ci n'est soumis qu'à un seul choc. La question demeure de la quantification de cet avantage, et l'on

comprend par exemple aisément que dans le cas limite d'une fonction de production Leontiev, cet avantage est nul.

Un dernier point concerne la résolution de ce type de modèles. En règle générale, ils n'admettent pas de solution analytique, et doivent être résolus numériquement. C'est une tâche relativement aisée en univers déterministe, mais nettement plus délicate en stochastique. Dans la mesure où nous mettons l'accent sur des comportements de précaution face au risque, nous ne pouvons utiliser les méthodes de résolution par linéarisation généralement employée dans la littérature. D'autre part, les méthodes de résolution non linéaires sont en général peu précises pour capturer les caractéristiques des prix d'actifs et des rendements (voir à ce sujet [Christiano-Fisher-97]). Nous adoptons dans cette étude une démarche pragmatique qui consiste à étudier une économie à trois périodes avec conditions initiales et terminales sur les stocks de capital privé et public, économie dont nous savons qu'elle a les mêmes propriétés qu'une économie à horizon infini lorsque l'on accroît suffisamment le nombre de périodes. Pour la problématique qui nous concerne, trois périodes permettent de capter les effets à l'œuvre<sup>1</sup>.

L'étude est organisée de la façon suivante: une section 2 présente le modèle, une section 3 étudie quantitativement ses propriétés et une section 4 conclue.

---

1. Ce ne sera pas le cas si nous étions par exemple intéressés par les propriétés spectrales du risque.

## 2 Le modèle

Nous présentons d'abord le modèle, avant de calculer l'équilibre concurrentiel et les règles de décision des agents privés pour une trajectoire donnée de décisions publiques. Ensuite, nous déterminons l'allocation de premier rang de l'économie, puis une allocation de second rang où le gouvernement prend comme données les règles de décisions privées concurrentielles.

### 2.1 Technologie, préférences et environnement institutionnel

L'économie est composée d'une entreprise représentative, d'un ménage représentatif et d'un gouvernement.

Dans l'économie décentralisée, l'entreprise accumule du capital privé et produit un bien unique en combinant capital privé et capital public, ce dernier étant considéré comme une externalité. Le ménage consomme et épargne sous forme d'actions de l'entreprise, et reçoit comme revenu les dividendes et le produit de la vente de ses actions. Le gouvernement accumule le capital public et se finance par impôts proportionnels au revenu total et par impôts forfaitaires.

Deux sources d'incertitude sont présentes dans l'économie: un choc sur la productivité totale des facteurs et un choc sur la dépréciation du capital privé.

Nous retenons dans cette étude la structure temporelle la plus simple. L'économie comprend trois périodes. La production et la consommation ont lieu aux deux premières périodes. A la première période, les stocks de capital public et privé sont donnés, les agents consomment, paient des impôts et

investissent. L'incertitude porte sur la réalisation des chocs sur la productivité totale des facteurs et sur la dépréciation du capital privé à la fin de la seconde période. A la seconde période, une fois l'incertitude réalisée, les agents consomment, paient des impôts et investissent. Les stocks des capital de la troisième période sont imposés comme conditions terminales. Ces conditions terminales sont les équivalents des conditions de transversalité dans un modèle à horizon infini<sup>2</sup>.

Aux périodes 1 et 2, la fonction de production est donnée par

$$y_1 = A_1 F(k_1, k_{g,1}) \quad (1)$$

$$y_2 = A_2 F(k_2, k_{g,2}) \quad (2)$$

et les lois d'accumulation sont données par

$$k_2 = (1 - \delta)k_1 + I_1 \quad (3)$$

$$k_3 = (1 - \delta_2)k_2 + I_2 \quad (4)$$

$$k_{g,2} = (1 - \delta_g)k_{g,1} + I_{g,1} \quad (5)$$

$$k_{g,3} = (1 - \delta_g)k_{g,2} + I_{g,2} \quad (6)$$

Les préférences du ménage représentatif sont supposées additivement séparables dans le temps:

$$U = u(c_1) + \beta E[u(c_2)]$$

où l'espérance est prise relativement aux réalisations de  $A_2$  et  $\delta_2$ . En notant  $f_A$  et  $f_\delta$  les densités de ces deux variables aléatoires et  $\Omega_A$  et  $\Omega_\delta$  les supports

---

2. Cette spécification est une bonne approximation d'un modèle à horizon infini, tout en étant infiniment plus facile à traiter analytiquement. En effet, nous souhaitons conserver toutes les non-linéarités dans le modèle puisque nous mettons l'accent sur des comportements de précaution face au risque.

associés, cette espérance s'écrit, sous l'hypothèse d'indépendance entre les deux variables:

$$E[u(c_2)] = \int_{\Omega_A} \int_{\Omega_\delta} u(c_2) f_A(A_2) f_\delta(\delta_2) d\delta_2 dA_2$$

Les contraintes budgétaires du gouvernement s'écrivent aux périodes 1 et 2:

$$I_{g,1} = \tau_1 y_1 + T_1 \quad (7)$$

$$I_{g,2} = \tau_2 y_2 + T_2 \quad (8)$$

Enfin, on définira le rendement du capital public et le rendement du capital privé comme les productivités marginales sociales nettes de la dépréciation:

$$r_k = \frac{\partial y_2}{\partial k_2} - \delta_2 \quad (9)$$

$$r_{k_g} = \frac{\partial y_2}{\partial k_{g,2}} - \delta_g \quad (10)$$

## 2.2 Equilibre concurrentiel

On obtient les allocations concurrentielles en résolvant un programme consolidé du ménage et de l'entreprise, à décisions publiques données. Ce programme s'écrit

$$\max_{c_1, c_2, k_2} u(c_1) + \beta E[u(c_2)] \quad (P_1)$$

s.c.

$$c_1 + k_2 - (1 - \delta)k_1 = (1 - \tau_1)A_1 F(k_1, k_{g,1}) - T_1$$

$$c_2 + k_3 - (1 - \delta_2)k_2 = (1 - \tau_2)A_2 F(k_2, k_{g,2}) - T_2$$

$$k_{g,2} = (1 - \delta_g)k_{g,1} + \tau_1 A F(k_1, k_{g,1}) + T_1$$

$$k_{g,3} = (1 - \delta_g)k_{g,2} + \tau_2 A_2 F(k_2, k_{g,2}) + T_2$$

$k_{g,1}, k_{g,3}, k_1, k_3, \tau_1, \tau_2, T_1, T_2$  donnés

La solution de ce problème est entièrement décrite par le choix de  $k_2$ , qui est obtenu comme solution de la condition du premier ordre suivante:

$$u'((1 - \tau_1)A F(k_1, k_{g,1}) - T_1 - k_2 + (1 - \delta)k_1) = \int_{\Omega_A} \int_{\Omega_\delta} (R_{k,2} u'((1 - \tau_2)A_2 F(k_2, k_{g,2}) - T_2 - k_3 + (1 - \delta)k_2)) f_A(A_2) f_\delta(\delta_2) d\delta_2 dA_2$$

avec

$$R_{k,2} = (1 - \delta_2 + A_2 \frac{\partial F(k_2, k_{g,2})}{\partial k_2})$$

Pour un étalonnage donné, cette équation peut être résolue numériquement en utilisant un algorithme de résolution d'équation non linéaire (*fsolve* de MATLAB) et un algorithme de calcul numérique d'intégrale double (*dblquad* de MATLAB).

## 2.3 Solution de premier rang

L'allocation de premier rang de cette économie est obtenue en résolvant un problème de planificateur qui choisit simultanément  $k$  et  $k_g$  à la date 2 et  $c$  aux dates 1 et 2. Pour une telle solution, l'externalité associée au capital public est internalisée. Le programme est similaire au programme ( $P_1$ ), à l'exception du fait que  $k_{g,2}$  est désormais également une variable de décision.

$$\max_{c_1, c_2, k_2, k_{g,2}} u(c_1) + \beta E[u(c_2)] \quad (P_2)$$

S.C.

$$\begin{aligned}
c_1 + k_2 - (1 - \delta)k_1 &= A_1 F(k_1, k_{g,1}) - I_{g,1} \\
c_2 + k_3 - (1 - \delta_2)k_2 &= A_2 F(k_2, k_{g,2}) - I_{g,2} \\
k_2 &= (1 - \delta)k_1 + I_1 \\
k_3 &= (1 - \delta_2)k_2 + I_2 \\
k_{g,2} &= (1 - \delta_g)k_{g,1} + I_{g,1} \\
k_{g,3} &= (1 - \delta_g)k_{g,2} + I_{g,2} \\
k_{g,1}, k_{g,3}, k_1, k_3 &\text{ donnés}
\end{aligned}$$

Les conditions d'optimalité de ce problème sont données par:

$$\begin{aligned}
&u' (A_1 F(k_1, k_{g,1}) - k_2 + (1 - \delta)k_1 - k_{g,2} + (1 - \delta_g)k_{g,1}) = \\
&\int_{\Omega_A} \int_{\Omega_\delta} (R_{k,2} u' (A_2 F(k_2, k_{g,2}) - k_3 + (1 - \delta)k_2 - k_{g,3} + (1 - \delta_g)k_{g,2})) f_A(A_2) f_\delta(\delta_2) d\delta_2 dA_2 \\
&\text{et} \\
&u' (A_1 F(k_1, k_{g,1}) - k_2 + (1 - \delta)k_1 - k_{g,2} + (1 - \delta_g)k_{g,1}) = \\
&\int_{\Omega_A} \int_{\Omega_\delta} (R_{k_{g,2}} u' (A_2 F(k_2, k_{g,2}) - k_3 + (1 - \delta)k_2 - k_{g,3} + (1 - \delta_g)k_{g,2})) f_A(A_2) f_\delta(\delta_2) d\delta_2 dA_2 \\
&\text{avec}
\end{aligned}$$

$$R_{k,2} = (1 - \delta_2 + A_2 \frac{\partial F(k_2, k_{g,2})}{\partial k_2})$$

et

$$R_{k_{g,2}} = (1 - \delta_g + A_2 \frac{\partial F(k_2, k_{g,2})}{\partial k_{g,2}})$$

## 2.4 Solution de second rang

L'allocation de second rang est définie de la manière suivante: le gouvernement prend comme donnée la solution du programme  $(P_1)$ , notée

$$(c_1(k_{g,2}, \tau_1, \tau_2, T_1, T_2), c_2(k_{g,2}, \tau_1, \tau_2, T_1, T_2), k_2(k_{g,2}, \tau_1, \tau_2, T_1, T_2)).$$

Conditionnellement à ces règles de décisions privées dérivées de l'équilibre concurrentiel, il choisit ces instruments  $k_{g,2}, \tau_1, \tau_2, T_1, T_2$  de manière à maximiser  $U$ . On se restreint ici aux règles de la forme

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau$$

$$T_1 = 0$$

$$T_2 = k_{g,3} - (1 - \delta_2)k_{g,2} - \tau y_2.$$

c'est à dire des règles à taux proportionnel d'imposition constant, et où l'ajustement se fait à la seconde période par impôt forfaitaire.

La solution du programme ( $P_1$ ) n'étant pas analytique, il nous est impossible d'obtenir analytiquement la dérivée  $\partial k_2 / \partial \tau$ , et nous procédons de manière numérique en évaluant  $U$  pour différentes valeurs de  $\tau$ . On vérifiera ainsi que l'objectif  $U$  est bien concave en  $\tau$ .

## 2.5 Mécanismes du modèle

Trois paramètres clés sont à la base des comportements dans le modèle: l'aversion au risque, la taille relative des chocs communs (sur la PTF) et spécifiques au capital privé (sur la dépréciation), l'élasticité de substitution entre  $k$  et  $k_g$ .

Les comportements de précaution des ménages vont expliquer la différence d'accumulation entre l'économie sans chocs et l'économie avec chocs. Le capital privé étant le seul actif à la disposition des ménages en univers concurrentiel, ceux-ci vont se couvrir partiellement contre le risque en détenant relativement plus de capital dans l'économie risquée (épargne de précaution). Dès lors, les rendements factoriels étant décroissants, le taux de rendement moyen du capital sera inférieur dans l'économie risquée.

Le capital privé peut alors apparaître comme un actif accroissant les possibilités d'assurance dans l'économie si les chocs ne sont pas uniquement commun. Lorsque la taille du choc spécifique au capital privé est relativement forte, la valeur d'assurance du capital public augmente, et il est optimal d'en accroître le montant, en acceptant pour cela une réduction de son rendement espéré. Cette valeur d'assurance peut être mesurée par la corrélation entre les rendements des stocks publics et privés de capital.

La taille de cette valeur d'assurance dépend cependant de l'élasticité de substitution entre capital public et privé. Plus celle-ci sera forte, plus il sera possible de diversifier les actifs sans perdre en production. Si en revanche la substitution est faible, les deux actifs s'avèrent nécessaire à la production, et il est moins profitable de s'assurer en augmentant le stock de capital public.

### 3 Exploration Quantitative

Afin de mesurer les tailles relatives des divers mécanismes en œuvre dans le modèle, nous en proposons dans cette section une évaluation quantitative.

#### 3.1 Etalonnage de référence

Chaque période vaut cinq ans. Les formes fonctionnelles retenues sont une CRRA pour la fonction d'utilité instantanée et une CES pour la fonction de production:

$$u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

où  $\sigma$  est le degré d'aversion relative au risque et

$$F(k, k_g) = (\alpha k^\nu + (1-\alpha)k_g^\nu)^{\rho/\nu}$$

où  $\rho$  représente les rendements d'échelle,  $1/(1-\nu)$  l'élasticité de substitution entre les deux stocks de capital et  $\alpha$  (respectivement  $(1-\alpha)$ ) la contribution relative du capital privé (respectivement public).

Nous calons les paramètres pour reproduire à l'état stationnaire du modèle les ratios suivant, observés sur l'économie française

TAB. 1 - *Valeurs observées, France, 1965-1995 (annuel)*

$\frac{i_g}{y}$	$\frac{k_g}{y}$	$\frac{i}{y}$	$\frac{k}{y}$	$\frac{c}{y}$
.034	.648	.114	1.972	.852

Nous supposons en outre des rendements sur les facteurs accumulables ( $\nu$ ) de .45, une élasticité de la production au capital public de .08 (soit  $(1-\alpha)\rho = .08$ ), une élasticité de substitution unitaire pour notre étalonnage de référence (Cobb-Douglas). Enfin, nous supposons une aversion au risque de  $\sigma = 3$  dans notre étalonnage de référence.

L'état stationnaire du modèle est défini par un triplet  $(k, k_g, \tau)$  tel que, si l'on impose les conditions initiales et terminales  $k$  et  $k_g$  et si l'on finance à chaque période le capital public par un impôt proportionnel au taux  $\tau$  ( $T = 0$  à chaque date), alors les choix optimaux des agents privés à l'équilibre concurrentiels sont tels que  $c_1 = c_2$ ,  $k_2 = k$  et  $k_{g,2} = k_g$ .

Les variables aléatoires  $A_2$  et  $\delta_2$  sont supposées uniformément distribuées, sur un support de + ou - 25% autour de leur valeur stationnaire. Rappelons que l'unité de temps vaut cinq ans, de sorte que l'écart type de ces chocs (notés  $\sigma_a$  et  $\sigma_d$ ) correspond à 1.25% environ sur une base trimestrielle.

Sous ces hypothèses, et pour reproduire les ratios donnés dans le tableau 1, nous choisissons les paramètres de référence donnés dans le tableau 2.

TAB. 2 - Paramètres de référence

$\delta$	$\delta_g$	$\beta$	$\tau$	$\nu$
.2850	.2550	.6626	.0340	0
$\alpha$	$\sigma$	$\rho$	$\sigma_a$	$\sigma_d$
.8222	3	.4	.25	.25

### 3.2 Comportement privé à décision publique donnée

Nous reportons dans le tableau 3 la solution du programme ( $P_1$ ). Nous notons  $r_k$  et  $r_{k,g}$  les rendements d'état stationnaire.  $E[r_k]$  et  $E[r_{k,g}]$  les espérances de ces rendements dans une économie avec chocs.  $\rho_{k,k_g}$  la corrélation entre ces deux rendements aléatoires,  $\sigma_k$  et  $\sigma_{k_g}$  les écart-types de ces rendements,  $wc$  le coût en bien-être de l'incertitude, exprimé en pourcentage de la consommation d'état stationnaire.

TAB. 3 - Résultats, étalonnage de référence, allocation concurrentielle

$r_k$	$r_{k,g}$	$E[r_k]/r_k - 1$	$E[r_{k,g}]/r_{k,g} - 1$	$r_{k,g}/r_k - 1$	$E[r_{k,g}]/E[r_k] - 1$
.0898	.0503	-.7466%	.4919%	-43.9561%	-43.2567%
$\rho_{k,k_g}$	$\sigma_k$	$\sigma_{k_g}$	$\sigma_{k_g}/\sigma_k - 1$	$wc$	$k^2/k - 1$
.9443	.0625%	.0386%	-.5045%	-.4328%	.8621%

Avec la calibration retenue, le rendement d'état stationnaire du capital public est près de 44%<sup>3</sup> plus faible que celui du capital privé. Nous n'attachons pas ici une importance trop grande à l'écart de taux d'état stationnaire, mais plutôt à la manière dont cet écart de taux est affecté par la présence d'incertitude. On constate en effet que l'écart entre les rendements des deux type de capital se réduit lorsque l'on considère les rendements moyens d'une

3. Il s'agit bien ici de pourcentage et non de point de taux.

économie risquée. Dans la mesure où la trajectoire de décision publique est donnée et invariante ( $k_g$  conserve à chaque période sa valeur stationnaire), ce résultat s'explique par l'apparition d'une épargne de précaution, sous forme de capital privé. Le stock  $k_2$  augmentant (de .86% par rapport à sa valeur stationnaire), son rendement baisse (de -.74%) et celui du capital public augmente (de .49%). Notons que le rendement du capital privé est plus variable que celui du capital public, puisque ce dernier n'est affecté que par l'un des deux chocs. La corrélation des rendements n'est pas unitaire (.94), ce qui confère un rôle d'assurance au capital public. Enfin, le coût total de la volatilité représente .43% de la consommation d'état stationnaire.

Nous étudions maintenant la déformation de ces résultats aux paramètres clés du modèle. Lorsque nous faisons varier un paramètre d'intérêt, nous modifions  $\alpha$  et  $A$  de sorte que l'état stationnaire déterministe du modèle ne soit pas modifiés. Ainsi, nous capturons l'interaction entre le paramètre d'intérêt et la sensibilité de l'économie au risque, en contrôlant par des effets de niveau d'état stationnaire.

La figure 1 étudie la déformation à l'aversion au risque. Il apparaît clairement qu'une augmentation de l'aversion au risque  $\sigma$  amplifie le comportement d'épargne de précaution.  $k_2$  augmente (jusqu'à +5% au dessus de son niveau stationnaire), et l'écart entre les rendements d'état stationnaire et risqués augmente en étant positif pour le capital privé, baisse en étant négatif pour le capital public. La corrélation des rendements se réduit, et le coût des fluctuations augmente.

La figure 2 étudie la déformation à l'écart type du choc commun sur la productivité des facteurs. Une augmentation de  $\sigma_n$  correspond à une aug-

mentation du risque, ce qui accroît le comportement de précaution et conduit aux mêmes résultats qualitatifs qu'une augmentation de l'aversion au risque. Notons que la corrélation entre les deux rendements est fortement affectée par le choc commun: elle est quasi nulle lorsque le choc commun est absent, et croît avec  $\sigma_a$ .

La figure 3 étudie la déformation à l'écart type du choc spécifique sur la dépréciation du capital privé. Il convient de noter que ce choc ne contribue que marginalement à la variance de l'économie, et ne déforme que très peu les rendements et le comportement de précaution. En revanche, la corrélation des rendements est assez fortement sensible: elle est unitaire lorsque le choc spécifique est de variance nulle, et décroît avec la variance de celui-ci.

Enfin, la figure 4 étudie la déformation à l'élasticité de substitution  $\nu$ . Lorsque les deux actifs sont fortement complémentaires, le capital privé joue son rôle d'assurance, de sorte que l'épargne de précaution est plus faible ( $k_2$  n'est que .65% au dessus de sa valeur stationnaire pour  $\nu = -10$ , contre près de .9% pour  $\nu = .95^4$ ). La corrélation entre les deux rendements est d'autant plus faible que les actifs sont complémentaires.

---

4. Rappelons que  $\nu = 1$  correspond à une substituabilité parfaite entre les deux stocks de capital, et  $\nu = -\infty$  à une technologie Leontiev.

FIG. 1 - Sensibilité à l'aversion au risque ( $\sigma$ ). (allocations concurrentielles)

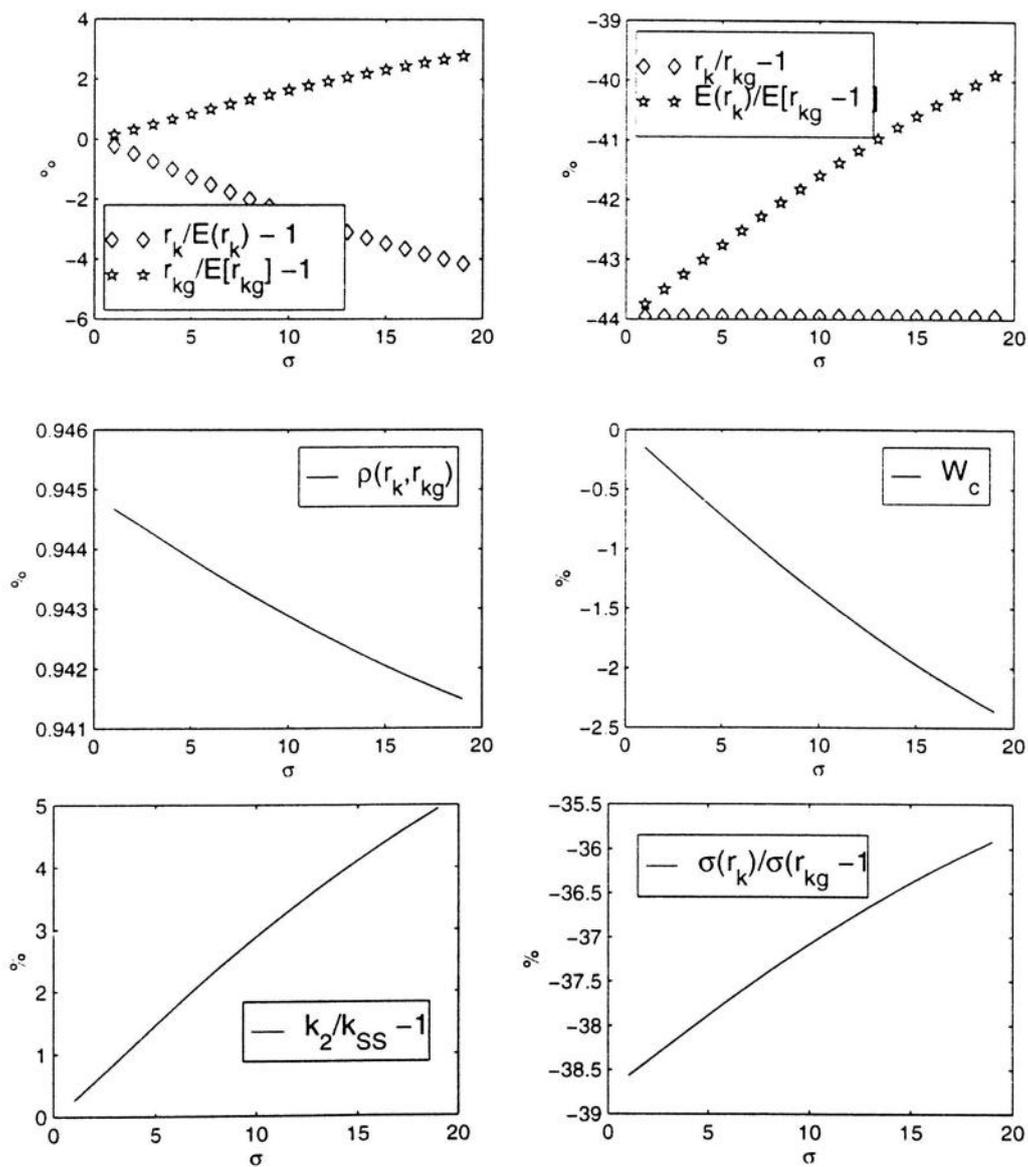


FIG. 2 - Sensibilité au risque sur la productivité totale des facteurs ( $\sigma_a$ ).  
(allocations concurrentielles)

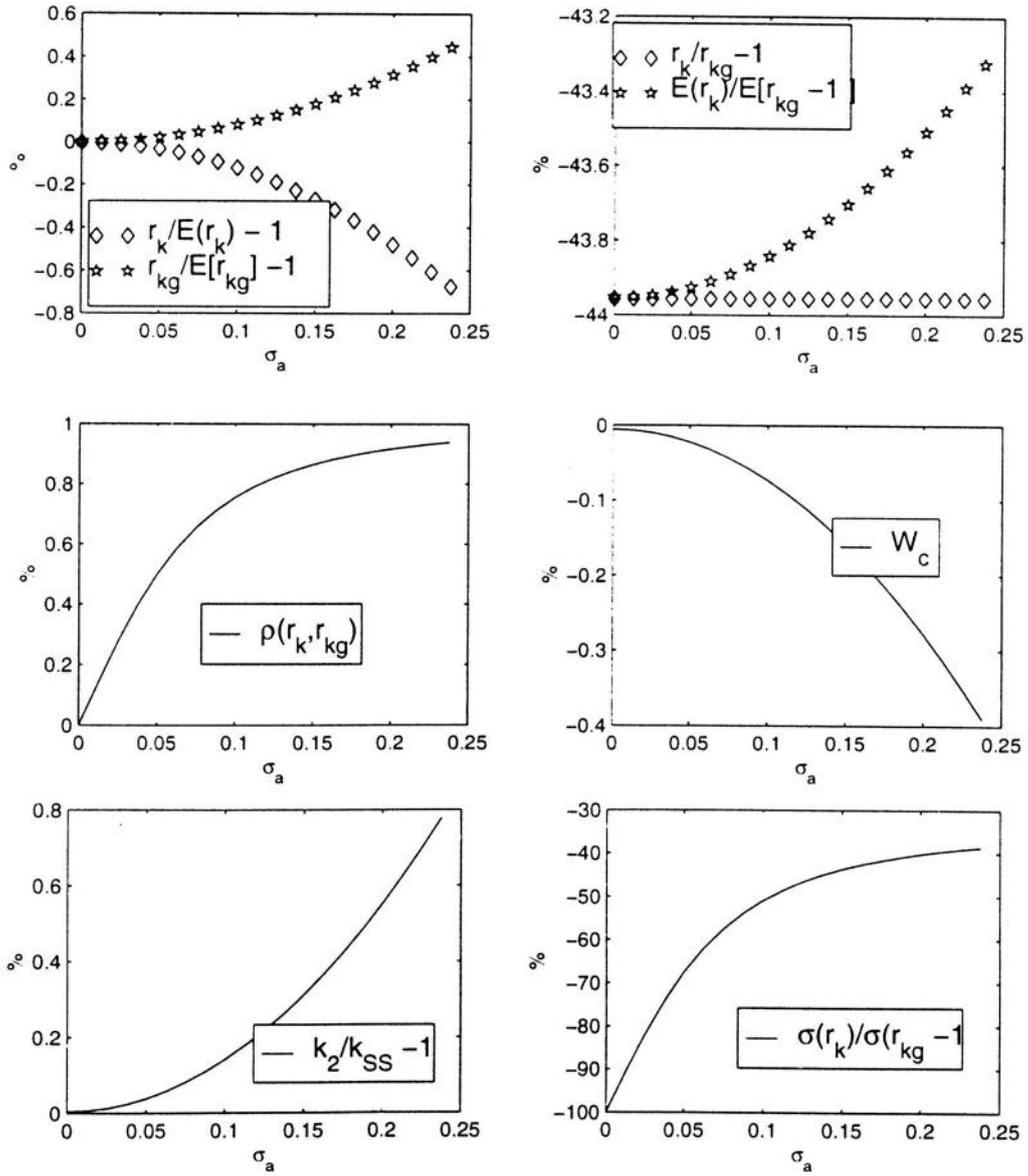


FIG. 3 - Sensibilité au risque sur la dépréciation du capital privé ( $\sigma_d$ ). (allocations concurrentielles)

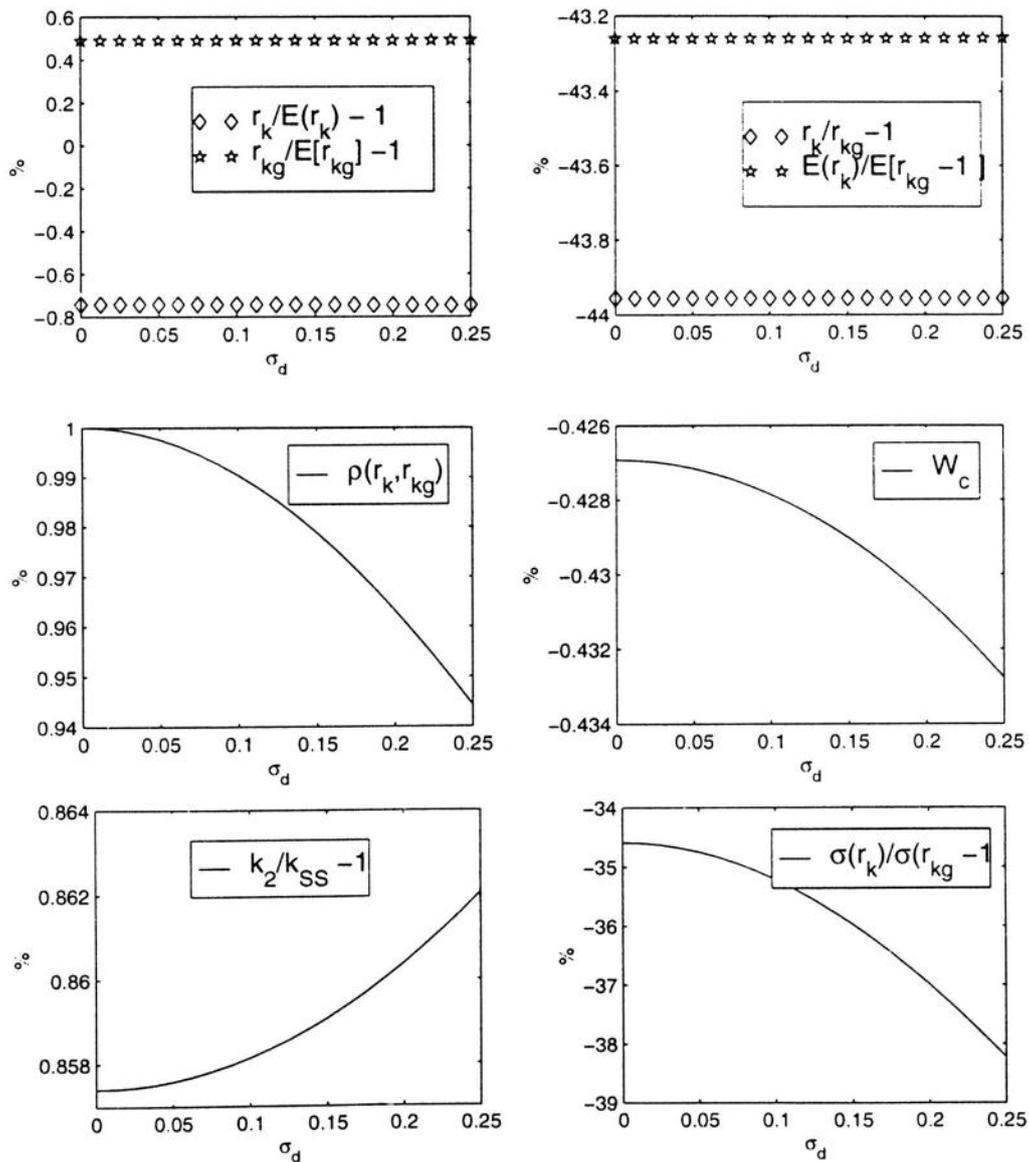
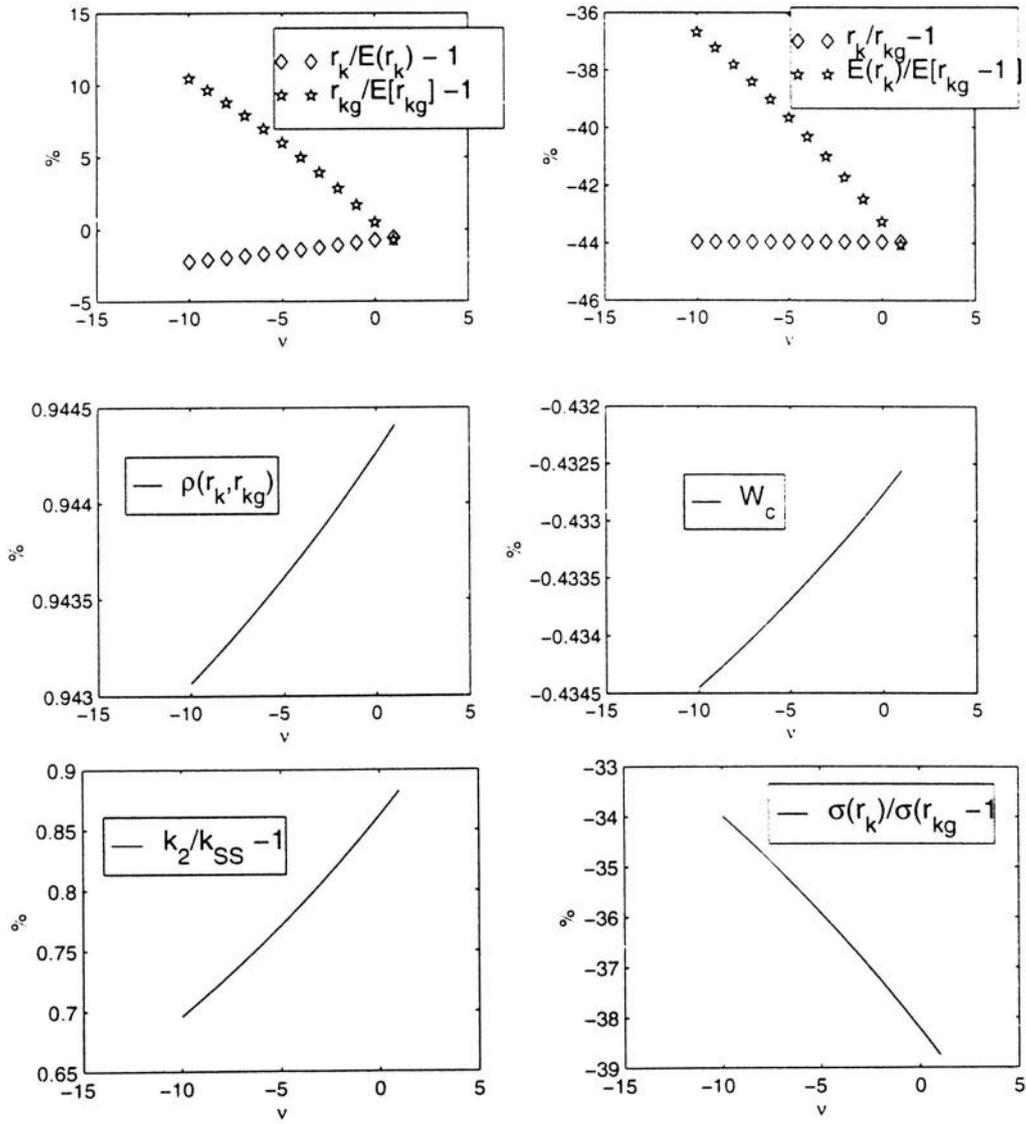


FIG. 4 - Sensibilité à la substitution entre  $k$  et  $k_j$  ( $\nu$ ). (allocations concurrentielles)



### 3.3 Le cas d'un planificateur

Nous considérons maintenant le cas d'un planificateur qui choisit  $k_2$  et  $k_{g,2}$  de manière optimale,  $k_1$ ,  $k_3$ ,  $k_{g,1}$  et  $k_{g,3}$  étant à leur niveau d'état stationnaire d'équilibre concurrentiel. Le tableau 4 présente les résultats pour la calibration de référence.

TAB. 4 - *Résultats, étalonnage de référence, allocation de premier rang*

$E[r_k]$	$E[r_{k,g}]$	$E[r_{k,g}]/E[r_k] - 1$	$k_{g,2}/k_g - 1$	$k_2/k - 1$
.0809	.0808	-0.2240 %	8.6783%	-75.4995%
$\rho_{k,k_g}$	$\sigma_k$	$\sigma_{k_g}$	$\sigma_{k_g}/\sigma_k - 1$	
.9987	.3991	.3973	-.4713%	

Le premier commentaire concerne le niveau relatif des deux rendements moyens. Dans une économie sans épargne de précaution, l'allocation optimale correspond à l'égalisation des rendements moyens. On constate que ce n'est pas le cas dans une économie où le risque est pris en compte dans les comportements, puis que le *spread*  $E[r_{k,g}]/E[r_k] - 1$  entre les deux rendements est de  $-.22\%$ . Ainsi, *il est optimal de choisir un rendement moyen du capital public plus faible que celui du capital privé*, car celui-ci possède une valeur d'assurance, n'étant pas affecté par le choc sur la dépréciation. Relativement à l'état stationnaire de l'équilibre concurrentiel, le capital public est augmenté de 8% et le capital public réduit de 75%. Les rendements étant presque égaux (à leur corrélation avec l'utilité marginale de la consommation près), ils ont pratiquement même variance et une corrélation quasi unitaire.

La figure 5 étudie la sensibilité des résultats à l'aversion au risque. Plus l'aversion au risque est grande, plus il sera optimal de réduire le rendement moyen du capital public relativement au capital privé, le *spread* atteignant

-1.4% pour une aversion de 15. La corrélation et les variances des rendements sont en revanche peu affectées, et ceci restera le cas quel que soit le paramètre qui varie.

La figure 6 étudie la sensibilité des résultats à l'écart type du choc commun sur la PTF. La variation de ce risque ne modifie que très peu le *spread*, puisque la valeur relative d'assurance du capital public ne s'accroît pas fortement en valeur absolue, le choc étant commun.

La figure 7 étudie la sensibilité des résultats à l'écart type du choc spécifique sur la dépréciation du capital public. Clairement, plus le choc spécifique est grand, plus le rendement moyen requis optimal du capital public sera faible, et le *spread* augmente en valeur absolue. Ici également, c'est la prise en compte explicite des comportements de précaution face au risque qui explique le choix optimal d'un rendement moyen plus faible du capital public.

La figure 7 étudie la sensibilité des résultats à la substitution entre  $k$  et  $k_y$ . Aucune déformation significative du *spread* n'est observée.

FIG. 5 - Sensibilité à l'aversion au risque ( $\sigma$ ). (allocations de premier rang)

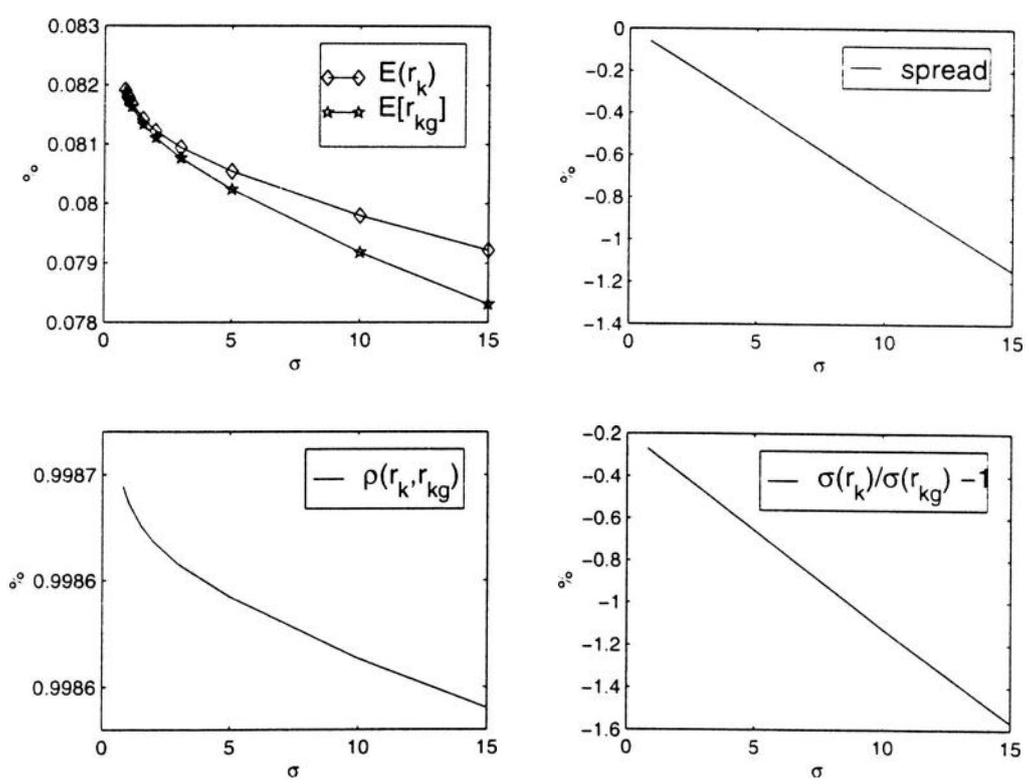


FIG. 6 - Sensibilité au risque sur la productivité totale des facteurs ( $\sigma_a$ ), (allocations de premier rang)

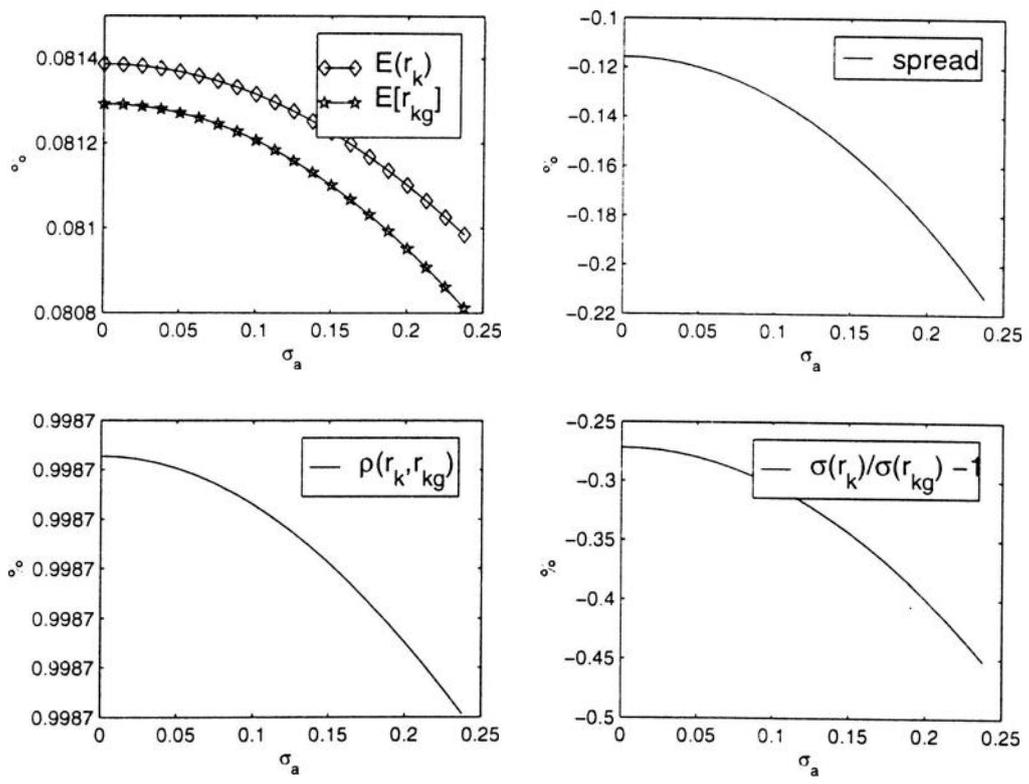


FIG. 7 - Sensibilité au risque sur la dépréciation du capital privé ( $\sigma_d$ ). (allocations de premier rang)

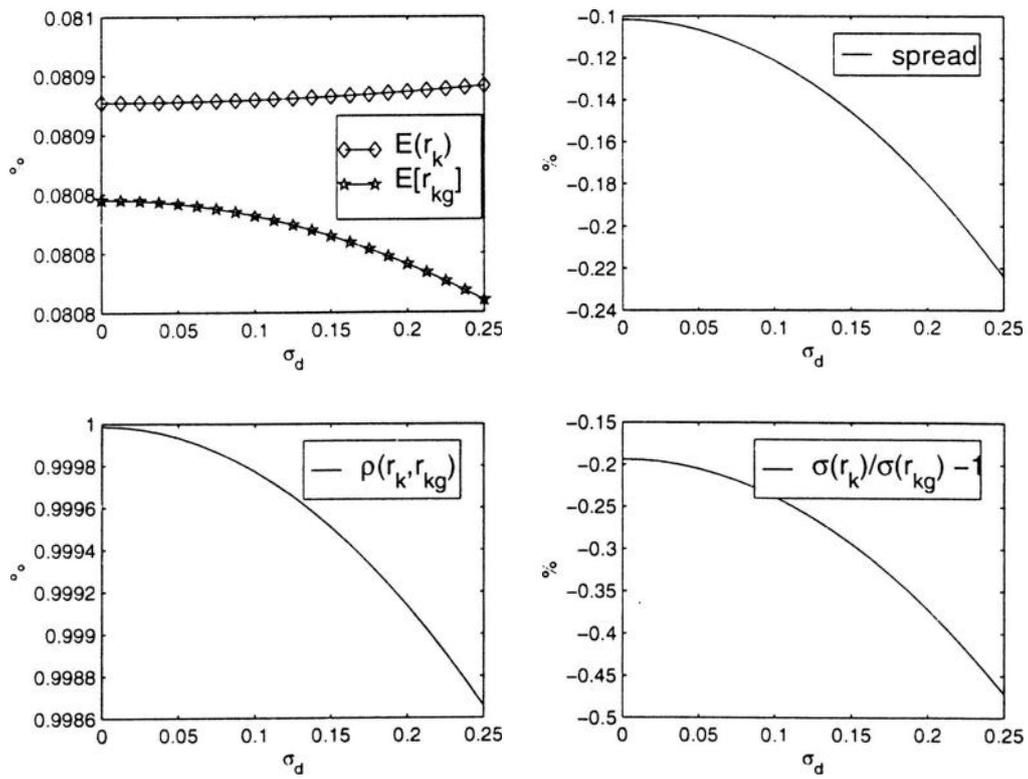
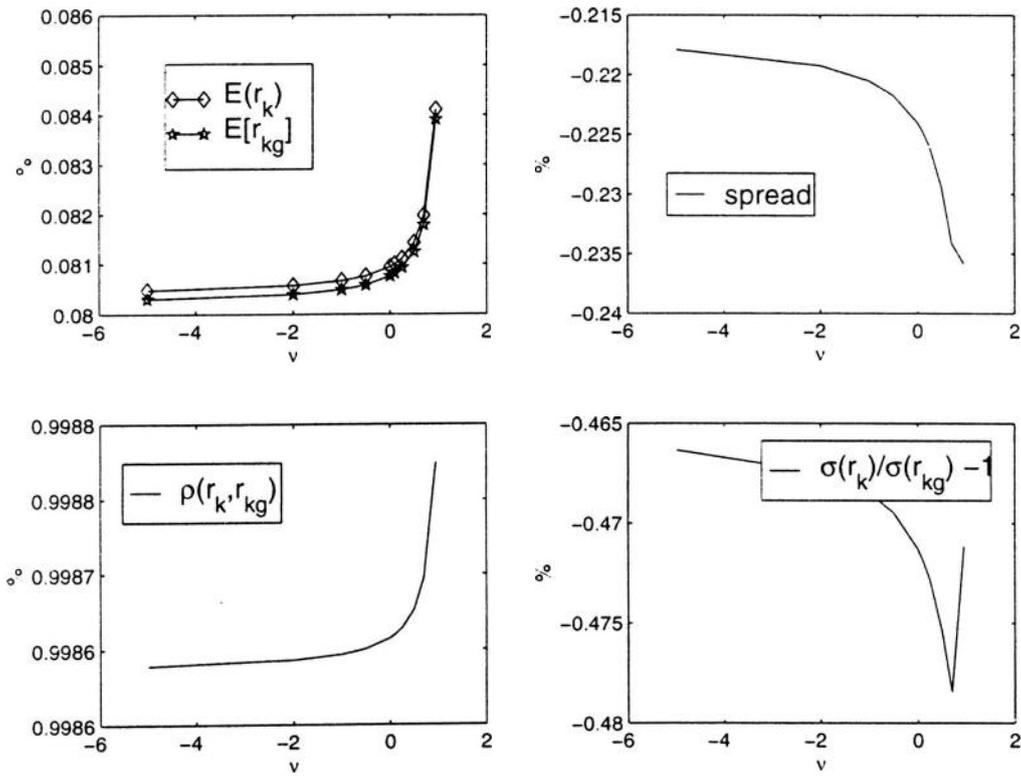


FIG. 8 - Sensibilité à la substitution entre  $k$  et  $k_g$  ( $\nu$ ). (allocations de premier rang)



### 3.4 Décision publique optimale de second rang

Le taux d'impôt direct optimal  $\tau_1$  est obtenu numériquement. Nous présentons sur les figures 9 et 10 la détermination de ce taux pour différentes valeurs de  $\nu$  et de  $\sigma$ . Il apparaît que le taux maximisant l'utilité est aux environs de 10% pour toutes les configurations des paramètres. Il conviendra d'exploiter plus en détail les propriétés de l'allocation de second rang.

FIG. 9 - Détermination du  $\tau_1$  optimal, sensibilité à la substitution entre  $k$  et  $k_j$  ( $\nu$ ). (allocations de second rang)

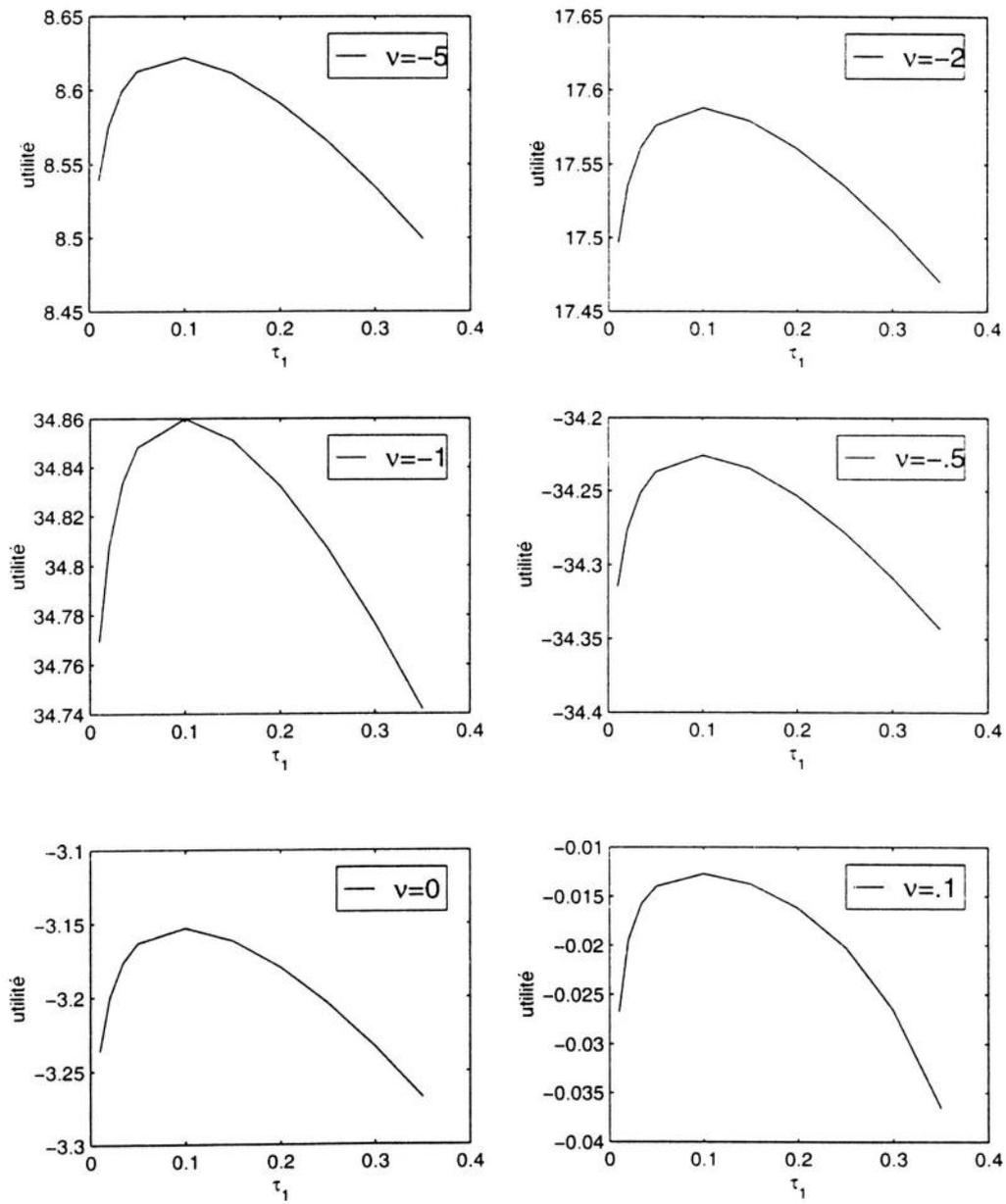
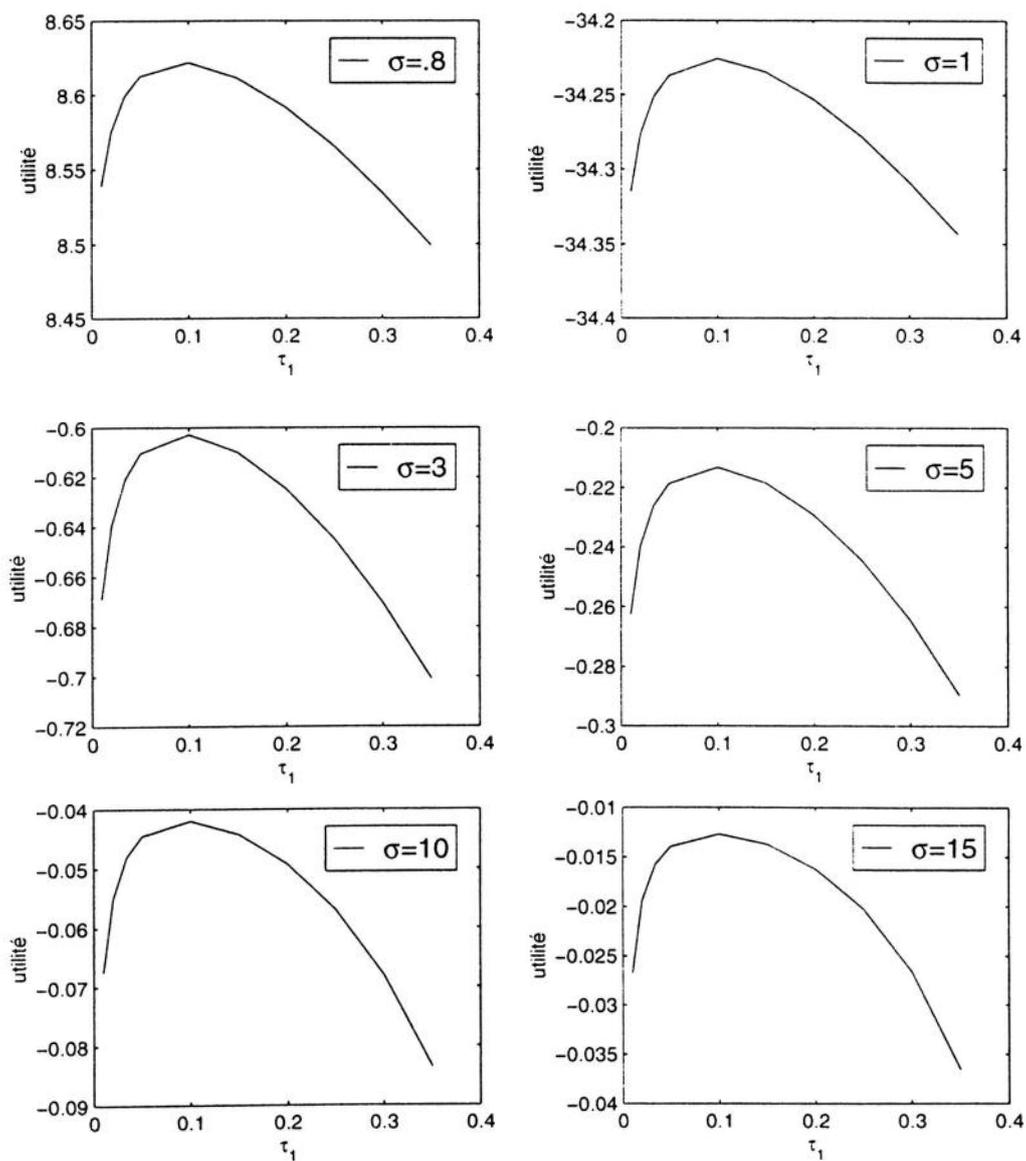


FIG. 10 - Détermination du  $\tau_1$  optimal, sensibilité à l'aversion au risque ( $\sigma$ ), (allocations de second rang)



## 4 Conclusion

Nous avons montré dans cette étude qu'il était possible d'endogénéiser les processus des rendements du capital privé et public dans un modèle simple d'équilibre général stochastique à anticipations rationnelles. Il est apparu que montrer comment la taille relative des chocs spécifiques et communs, l'aversion au risque et la degré de substituabilité entre les deux types de capital jouaient un rôle dans les propriétés stochastiques des rendements.

Lorsque l'on étudie les décisions privées optimales, il apparaît clairement un comportement de précaution qui, toutes choses égales par ailleurs, réduit le rendement du capital privé et augmente celui du capital public. Lorsque l'on considère une solution de planificateur, il peut être optimal d'exiger du capital public un rendement social en moyenne inférieur à celui du capital privé, s'il possède une valeur d'assurance dans un univers risqué.

## Références

- K. Arrow et R. Lind. Uncertainty and the evaluation of public investment decision. *American Economic Review*, 60:364–78, 1970.
- D. Aschauer. Is public expenditure productive? *Journal of Monetary Economics*, 23:177–200, 1989.
- L. Christiano et J. Fisher. *Algorithms for Solving Dynamic Models with Occasionally Binding Constraints*. Technical working paper 218, NBER, january 1997.

E. Grinols. Public investment and social risk-sharing. *European Economic Review*, 29:303–21, 1985.

C. Hurlin et F. Portier. *Taux d'actualisation public, distorsions fiscales et croissance: Modélisation et application à l'économie française*. Working Paper 97-xx, CEPREMAP, Paris, 1997.

P.Y. Hénin. *Note problématique et bibliographique sur le taux d'actualisation*. mimeo. CEPREMAP, February 1997.

P. Romer. Increasing returns and long-run growth. *Journal of Political Economy*, 94:1002–37, 1986.

P. Samuelson. Discussion. *American Economic Review*. 54:93–96, 1964.

